Théorème de Weierstrass

(Quitty - Quéffélec)

Thm : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue. Soit $\omega : h \mapsto \sup\{|f(u)-f(v)|,\ |u-v|\leq h\}$ son module de continuité.

Posons pour $n\in\mathbb{N}^*$, $B_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right)X^k(1-X)^{n-k}$

- (B_n) cvu sur $[0,1]$ vers f et $\exists C\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}^*, \|f-B_n\|_\infty \leq C\omega(1/\sqrt{n})$.
- Cette majoration est optimale : $\exists f, \exists \delta>0, \forall n\in\mathbb{N}^*, \|f-B_n\|_\infty \geq \delta\,\omega(1/\sqrt{n})$.

• Soit (X_n) suite de v.a. iid de loi $\mathcal{B}(x)$, $x\in[0,1]$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{B}(n,x)$ donc par LGN, $B_n(x) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(f(x)) = f(x)$.

Lemme : Soient $h\in[0,1]$, $\lambda>0$ tq $\lambda h\in[0,1]$. $\omega(\lambda h)\leq(\lambda+1)\,\omega(h)$.

On va d'abord voir que ω est sous-additive. Soient $\delta,\varepsilon>0$.

Soit $F : \begin{array}{l} A_{\delta+\varepsilon} \to \mathbb{R} \\ (x,y)\mapsto |f(x)-f(y)| \end{array}$ où $A_{\delta+\varepsilon} = \{(x,y)\in[0,1]^2,\ |x-y|\leq\delta+\varepsilon\}$ compact.

F est continue sur $A_{\delta+\varepsilon}$ compact donc $\exists(x_0,y_0)\in A_{\delta+\varepsilon} : \omega(\delta+\varepsilon) = |f(x_0)-f(y_0)|$.

Soit alors $z\in[0,1]$ tq $|x_0-z|\leq\delta$, $|y_0-z|\leq\varepsilon$.

$\omega(\delta+\varepsilon) = |f(x_0)-f(y_0)| \leq |f(x_0)-f(z)|+|f(z)-f(y_0)| \leq \omega(\delta)+\omega(\varepsilon)$.

De là, par récurrence, $\forall N\in\mathbb{N}, \omega(Nh)\leq N\omega(h)$ puis $\omega(\lambda h)\leq\omega[(\lfloor\lambda\rfloor+1)h]\leq(\lfloor\lambda\rfloor+1)\omega(h)$
$\leq(\lambda+1)\omega(h)$

En particulier $\left(\lambda=\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)$, $\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)\leq\left(\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|+1\right)\omega\left(1/\sqrt{n}\right)$.

$|f(x)-B_n(x)| \underset{\text{par IT}}{\leq} \mathbb{E}\left(\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right) \leq \mathbb{E}\left(\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)\right) \leq \left(\sqrt{n}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_1+1\right)\omega\left(1/\sqrt{n}\right)$

(Hölder) $\leq \left(\sqrt{n}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_2+1\right)\omega\left(1/\sqrt{n}\right)$.

Or $\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_2^2 \underset{\text{car centrée}}{=} \mathrm{Var}\left(x-\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathrm{Var}\,S_n}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n}$

Donc $|f(x)-B_n(x)|\leq\left(\sqrt{x(1-x)}+1\right)\omega\left(1/\sqrt{n}\right) = \frac{3}{2}\,\omega\left(1/\sqrt{n}\right)$

• Prenons $f : x\mapsto |x-1/2|$. Par inégalité triangulaire inversée :

$\left||x-\tfrac12|-|y-\tfrac12|\right|\leq|x-y|$, donc $\omega(h)\leq h$.

Soit (X_n) suite de v.a. iid de loi $\mathcal{B}\left(\frac12\right)$.

$\|f-B_n\|_\infty \geq \left|f\left(\tfrac12\right)-B_n\left(\tfrac12\right)\right| = B_n\left(\tfrac12\right) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac12\right|\right) = \frac{1}{2n}\mathbb{E}(|2S_n-n|) \geq \frac{1}{2n}\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right|\right)$

avec $\varepsilon_k = 2X_k-1$ Rademacher iid.

Posons $Y = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right)$. $|Y| = \prod_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{\varepsilon_k^2}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n}e^{1/n}\right)^{1/2} = \sqrt{e}$.

et $\mathbb{E}(\varepsilon_k Y) \underset{\text{indép}}{=} \mathbb{E}\left(\varepsilon_k\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right)\right)\prod_{j\neq k}\mathbb{E}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_j\right) = \frac{i}{\sqrt{n}}\times 1$, donc $\left|\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k Y\right)\right| = \sqrt{n}$.

Donc $\sqrt{n} = \left|\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k Y\right)\right| \leq \mathbb{E}\left(|Y|\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right|\right) \leq \sqrt{e}\,2n\,\|f-B_n\|_\infty$.

Donc : $\|f-B_n\|_\infty \geq \frac{1}{2\sqrt{en}} \geq \frac{1}{2\sqrt{e}}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$